МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ІМЕНІ МИХАЙЛА ОСТРОГРАДСЬКОГО

НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ ІНСТИТУТ ЕЛЕКТРИЧНОЇ ІНЖЕНЕРІЇ

ТА ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

Кафедра комп’ютерної інженерії та електроніки

ЗВІТ З ПРАКТИЧНИХ РОБІТ

з навчальної дисципліни

«Імовірнісно-статистичні методи інформаційних технологій»

Тема

«Найпростіший потік подій. Елементи теорії СМО. Ланцюги Маркова »

Студент гр. КН-23-1 Гур’єв Д.П.

Викладач к. т. н., доц. В. М. Сидоренко

Кременчук 2024

**ЗМІСТ**

[1. Завдання 6 2](#_Toc506793618)

[2. Завдання 7 3](#_Toc236556697)

[3. Завдання 8 4](#_Toc2011482105)

[4. Завдання 9 5](#_Toc956454301)

[5. Завдання 10 8](#_Toc2049412943)

[1 Контрольні запитання 11](#_Toc635398082)

## Завдання 6

**Постановка задачі:** Задано матрицю переходу P1=(0.7 0.4 0.3 0.6) Знайти матрицю переходу P2.

1. Знайти матрицю переходу P2P\_2P2 для даної матриці P1P\_1P1 :

Якщо матриця переходу P1P\_1P1 задана як:

P1=(0.70.40.30.6),P\_1 = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.4 [\\](file:///) 0.3 & 0.6 \end{pmatrix},P1 =(0.70.3 0.40.6 ),

то для знаходження матриці переходу P2P\_2P2 потрібно піднести P1P\_1P1 до квадрату, оскільки P2=P12P\_2 = P\_1^2P2 =P12 (це матриця переходу для двох кроків).

Обчислимо:

P2=P12=(0.70.40.30.6)⋅(0.70.40.30.6)P\_2 = P\_1^2 = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.4 [\\](file:///) 0.3 & 0.6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.7 & 0.4 [\\](file:///) 0.3 & 0.6 \end{pmatrix}P2 =P12 =(0.70.3 0.40.6 )⋅(0.70.3 0.40.6 )

Множимо матриці:

P2=((0.7⋅0.7+0.4⋅0.3)(0.7⋅0.4+0.4⋅0.6)(0.3⋅0.7+0.6⋅0.3)(0.3⋅0.4+0.6⋅0.6))P\_2 = \begin{pmatrix} (0.7 \cdot 0.7 + 0.4 \cdot 0.3) & (0.7 \cdot 0.4 + 0.4 \cdot 0.6) [\\](file:///) (0.3 \cdot 0.7 + 0.6 \cdot 0.3) & (0.3 \cdot 0.4 + 0.6 \cdot 0.6) \end{pmatrix}P2 =((0.7⋅0.7+0.4⋅0.3)(0.3⋅0.7+0.6⋅0.3) (0.7⋅0.4+0.4⋅0.6)(0.3⋅0.4+0.6⋅0.6) ) P2=(0.49+0.120.28+0.240.21+0.180.12+0.36)=(0.610.520.390.48)P\_2 = \begin{pmatrix} 0.49 + 0.12 & 0.28 + 0.24 [\\](file:///) 0.21 + 0.18 & 0.12 + 0.36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.61 & 0.52 [\\](file:///) 0.39 & 0.48 \end{pmatrix}P2 =(0.49+0.120.21+0.18 0.28+0.240.12+0.36 )=(0.610.39 0.520.48 )

Отже, матриця переходу P2P\_2P2 :

P2=(0.610.520.390.48)P\_2 = \begin{pmatrix} 0.61 & 0.52 \\ 0.39 & 0.48 \end{pmatrix}P2 =(0.610.39 0.520.48 )

## Завдання 7

**Постановка задачі:** Побудувати граф станів СМО «-клієнтів –Web-сервер» (система М/М/1) і систему рівнянь Колмогорова для

n=4, λ=1, μ=2. P*зан*, P0, A, w, T*обс*, T*відг*.

Граф станів СМО М/М/1 (система з 1 обслуговуючим сервером) і рівняння Колмогорова для n=4n=4n=4, λ=1\lambda=1λ=1, μ=2\mu=2μ=2:

Граф станів:

Для системи М/М/1 граф станів виглядає так:

Стан 0: немає клієнтів.

Стан 1: один клієнт на сервері.

Стан 2: два клієнти (один на сервері, один чекає).

Стан 3: три клієнти.

Стан 4: чотири клієнти.

Ймовірність переходу з одного стану в інший залежить від інтенсивності надходження клієнтів (λ\lambdaλ) і інтенсивності обслуговування (μ\muμ).

Система рівнянь Колмогорова:

dP0(t)dt=−λP0(t)+μP1(t)\frac{dP\_0(t)}{dt} = -\lambda P\_0(t) + \mu P\_1(t)dtdP0 (t) =−λP0 (t)+μP1 (t) dP1(t)dt=λP0(t)−(λ+μ)P1(t)+μP2(t)\frac{dP\_1(t)}{dt} = \lambda P\_0(t) - (\lambda + \mu) P\_1(t) + \mu P\_2(t)dtdP1 (t) =λP0 (t)−(λ+μ)P1 (t)+μP2 (t) dP2(t)dt=λP1(t)−(λ+μ)P2(t)+μP3(t)\frac{dP\_2(t)}{dt} = \lambda P\_1(t) - (\lambda + \mu) P\_2(t) + \mu P\_3(t)dtdP2 (t) =λP1 (t)−(λ+μ)P2 (t)+μP3 (t) dP3(t)dt=λP2(t)−(λ+μ)P3(t)+μP4(t)\frac{dP\_3(t)}{dt} = \lambda P\_2(t) - (\lambda + \mu) P\_3(t) + \mu P\_4(t)dtdP3 (t) =λP2 (t)−(λ+μ)P3 (t)+μP4 (t) dP4(t)dt=λP3(t)−μP4(t)\frac{dP\_4(t)}{dt} = \lambda P\_3(t) - \mu P\_4(t)dtdP4 (t) =λP3 (t)−μP4 (t)

## Завдання 8

**Постановка задачі:** Задано матрицю переходу P1=(0.30.50.70.5). Знайти матрицю переходу P2.

Знайти матрицю переходу P2P\_2P2 для:

P1=(0.30.70.50.5)P\_1 = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 [\\](file:///) 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}P1 =(0.30.5 0.70.5 )

Матриця переходу для двох кроків P2=P12P\_2 = P\_1^2P2 =P12 :

P2=P1⋅P1=(0.30.70.50.5)⋅(0.30.70.50.5)P\_2 = P\_1 \cdot P\_1 = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 [\\](file:///) 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 [\\](file:///) 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}P2 =P1 ⋅P1 =(0.30.5 0.70.5 )⋅(0.30.5 0.70.5 )

Обчислимо:

P2=((0.3⋅0.3+0.7⋅0.5)(0.3⋅0.7+0.7⋅0.5)(0.5⋅0.3+0.5⋅0.5)(0.5⋅0.7+0.5⋅0.5))P\_2 = \begin{pmatrix} (0.3 \cdot 0.3 + 0.7 \cdot 0.5) & (0.3 \cdot 0.7 + 0.7 \cdot 0.5) [\\](file:///) (0.5 \cdot 0.3 + 0.5 \cdot 0.5) & (0.5 \cdot 0.7 + 0.5 \cdot 0.5) \end{pmatrix}P2 =((0.3⋅0.3+0.7⋅0.5)(0.5⋅0.3+0.5⋅0.5) (0.3⋅0.7+0.7⋅0.5)(0.5⋅0.7+0.5⋅0.5) ) P2=(0.09+0.350.21+0.350.15+0.250.35+0.25)=(0.440.560.400.60)P\_2 = \begin{pmatrix} 0.09 + 0.35 & 0.21 + 0.35 [\\](file:///) 0.15 + 0.25 & 0.35 + 0.25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.44 & 0.56 [\\](file:///) 0.40 & 0.60 \end{pmatrix}P2 =(0.09+0.350.15+0.25 0.21+0.350.35+0.25 )=(0.440.40 0.560.60 )

Отже, матриця переходу P2P\_2P2 :

P2=(0.440.560.400.60)P\_2 = \begin{pmatrix} 0.44 & 0.56 \\ 0.40 & 0.60 \end{pmatrix}P2 =(0.440.40 0.560.60 )

## Завдання 9

Постановка задачі: Побудувати граф станів СМО «-клієнтів – Web-сервер» (система М/М/1) і систему рівнянь Колмогорова для

n=4, λ=2μ=1. Знайти P*зан*, P0, A, w, T*обс*, T*відг*.

Граф станів і система рівнянь Колмогорова для n=4n=4n=4, λ=2\lambda=2λ=2, μ=1\mu=1μ=1:

Граф станів буде таким же, як у пункті 2, але з іншими параметрами λ\lambdaλ і μ\muμ.

Система рівнянь Колмогорова виглядатиме так:

dP0(t)dt=−2P0(t)+P1(t)\frac{dP\_0(t)}{dt} = -2 P\_0(t) + P\_1(t)dtdP0 (t) =−2P0 (t)+P1 (t) dP1(t)dt=2P0(t)−(2+1)P1(t)+P2(t)\frac{dP\_1(t)}{dt} = 2 P\_0(t) - (2 + 1) P\_1(t) + P\_2(t)dtdP1 (t) =2P0 (t)−(2+1)P1 (t)+P2 (t) dP2(t)dt=2P1(t)−(2+1)P2(t)+P3(t)\frac{dP\_2(t)}{dt} = 2 P\_1(t) - (2 + 1) P\_2(t) + P\_3(t)dtdP2 (t) =2P1 (t)−(2+1)P2 (t)+P3 (t) dP3(t)dt=2P2(t)−(2+1)P3(t)+P4(t)\frac{dP\_3(t)}{dt} = 2 P\_2(t) - (2 + 1) P\_3(t) + P\_4(t)dtdP3 (t) =2P2 (t)−(2+1)P3 (t)+P4 (t) dP4(t)dt=2P3(t)−P4(t)\frac{dP\_4(t)}{dt} = 2 P\_3(t) - P\_4(t)dtdP4 (t) =2P3 (t)−P4 (t)

## Завдання 10

## **Постановка задачі:** Задано матрицю переходу P1=(0.60.10.40.9). Знайти матрицю переходу P2.

Знайти матрицю переходу P2P\_2P2 для:

P1=(0.60.10.40.9)P\_1 = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.1 [\\](file:///) 0.4 & 0.9 \end{pmatrix}P1 =(0.60.4 0.10.9 )

Для обчислення P2=P12P\_2 = P\_1^2P2 =P12 :

P2=P1⋅P1=(0.60.10.40.9)⋅(0.60.10.40.9)P\_2 = P\_1 \cdot P\_1 = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.1 [\\](file:///) 0.4 & 0.9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.6 & 0.1 [\\](file:///) 0.4 & 0.9 \end{pmatrix}P2 =P1 ⋅P1 =(0.60.4 0.10.9 )⋅(0.60.4 0.10.9 )

Обчислимо:

P2=((0.6⋅0.6+0.1⋅0.4)(0.6⋅0.1+0.1⋅0.9)(0.4⋅0.6+0.9⋅0.4)(0.4⋅0.1+0.9⋅0.9))P\_2 = \begin{pmatrix} (0.6 \cdot 0.6 + 0.1 \cdot 0.4) & (0.6 \cdot 0.1 + 0.1 \cdot 0.9) [\\](file:///) (0.4 \cdot 0.6 + 0.9 \cdot 0.4) & (0.4 \cdot 0.1 + 0.9 \cdot 0.9) \end{pmatrix}P2 =((0.6⋅0.6+0.1⋅0.4)(0.4⋅0.6+0.9⋅0.4) (0.6⋅0.1+0.1⋅0.9)(0.4⋅0.1+0.9⋅0.9) ) P2=(0.36+0.040.06+0.090.24+0.360.04+0.81)=(0.400.150.600.85)P\_2 = \begin{pmatrix} 0.36 + 0.04 & 0.06 + 0.09 [\\](file:///) 0.24 + 0.36 & 0.04 + 0.81 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.40 & 0.15 [\\](file:///) 0.60 & 0.85 \end{pmatrix}P2 =(0.36+0.040.24+0.36 0.06+0.090.04+0.81 )=(0.400.60 0.150.85 )

Отже, матриця переходу P2P\_2P2 :

P2=(0.400.150.600.85)P\_2 = \begin{pmatrix} 0.40 & 0.15 \\ 0.60 & 0.85 \end{pmatrix}P2 =(0.400.60 0.150.85 )

# Контрольні запитання

1. Що таке СМО і які головні елементи є у її структурі?

Система масового обслуговування (СМО) — це модель, яка описує процес обслуговування клієнтів (заявок) у різних системах. Вона використовується для аналізу і оптимізації роботи таких систем, як кол-центри, серверні мережі, транспортні системи тощо.

Головні елементи СМО:

Заявки: це об'єкти, які приходять на обслуговування (клієнти, пакети даних, завдання).

Обслуговуючі пристрої: сервери, працівники або механізми, які обслуговують заявки.

Черга: місце, де заявки чекають на обслуговування, якщо всі обслуговуючі пристрої зайняті.

Правило обслуговування: визначає, як заявки обслуговуються (наприклад, за принципом "перший прийшов — перший обслугований" або "за пріоритетом").

Інтенсивність потоку заявок і обслуговування: визначає частоту прибуття заявок і швидкість їх обслуговування.

2. Які властивості має найпростіший потік подій, і які його характеристики можна виміряти?

Найпростіший потік подій (Пуассонівський потік) має такі властивості:

Випадковість: час між подіями є випадковим і описується експоненціальним розподілом.

Відсутність пам’яті: час до наступної події не залежить від попередніх подій.

Стаціонарність: інтенсивність потоку подій постійна (середня кількість подій за фіксований проміжок часу є постійною).

Характеристики:

Інтенсивність потоку λ\lambdaλ — кількість подій, що виникає за одиницю часу.

Час між подіями — описується експоненціальним розподілом із середнім значенням 1λ\frac{1}{\lambda}λ1 .

3. Які основні характеристики СМО визначають її продуктивність?

Основні характеристики СМО, що впливають на її продуктивність:

Інтенсивність потоку заявок (λ\lambdaλ): кількість заявок, які надходять у систему за одиницю часу.

Інтенсивність обслуговування (μ\muμ): кількість заявок, які система може обслуговувати за одиницю часу.

Час обслуговування: середній час, необхідний для обслуговування однієї заявки.

Ймовірність відмови: ймовірність того, що заявка не буде обслугована через перевантаженість системи.

Коефіцієнт завантаження (ρ\rhoρ): відношення ρ=λμ\rho = \frac{\lambda}{\mu}ρ=μλ , що показує рівень завантаження системи.

4. Які чинники впливають на інтенсивність потоку подій у системі масового обслуговування?

Чинники, що впливають на інтенсивність потоку подій (λ\lambdaλ) у СМО:

Попит на послуги: кількість клієнтів або заявок, що бажають отримати обслуговування.

Розклад подій: час і частота надходження заявок можуть змінюватися протягом доби, місяця або року.

Зовнішні фактори: акції, зміни в економічній ситуації, реклама, доступність альтернативних послуг.

Обмеження системи: доступність ресурсів або обмеження пропускної здатності можуть впливати на потік заявок.

5. Як визначається інтенсивність обслуговування в СМО?

Інтенсивність обслуговування (μ\muμ) визначається як середня кількість заявок, які можуть бути обслуговані системою за одиницю часу. Вона залежить від:

Продуктивності обслуговуючого пристрою: швидкості роботи сервера, працівника тощо.

Часу обслуговування: чим менший середній час обслуговування, тим вища інтенсивність (μ=1Tобслуговування\mu = \frac{1}{T\_{обслуговування}}μ=Tобслуговування 1 ).

6. Які властивості мають ланцюги Маркова, і як їх застосовують у теорії СМО?

Ланцюги Маркова мають такі властивості:

Відсутність пам’яті: майбутній стан залежить лише від поточного стану, а не від попередніх.

Стаціонарність: імовірності переходів між станами залишаються постійними з часом.

Застосування в СМО:

Ланцюги Маркова використовуються для моделювання поведінки системи, де стани представляють кількість заявок у системі, а ймовірності переходів між станами описують зміну кількості заявок через прибуття нових або обслуговування існуючих заявок.

7. Що таке стаціонарний режим роботи СМО і чому він важливий для аналізу?

Стаціонарний режим роботи СМО — це стан системи, коли імовірності перебування в кожному з можливих станів стабілізуються і не змінюються з часом. Важливий для аналізу, оскільки дозволяє розраховувати довгострокові характеристики, такі як:

Середня кількість заявок у системі.

Ймовірність черг.

Час очікування в черзі.

8. Як визначається ймовірність утрати заявки в системі масового обслуговування?

Ймовірність утрати заявки — це ймовірність того, що заявка не буде обслугована через перевантаженість системи. У системах з обмеженою чергою або системах із відмовою (М/М/1/К), вона визначається через імовірність того, що всі місця в черзі та обслуговуючі пристрої зайняті. В таких випадках використовують формулу Ерланга:

Pвтрати=(λ/μ)KK!∑n=0K(λ/μ)nn!P\_{втрати} = \frac{(\lambda/\mu)^K}{K! \sum\_{n=0}^{K} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}}Pвтрати =K!∑n=0K n!(λ/μ)n (λ/μ)K

9. Що таке ефективність обслуговування в СМО і як її вимірюють?

Ефективність обслуговування — це здатність системи обслуговувати заявки без значних затримок і з мінімальною втратою продуктивності. Її можна вимірювати через:

Середній час обслуговування.

Ймовірність відмови.

Пропускну здатність системи (інтенсивність обслуговування μ\muμ).

10. Як визначається коефіцієнт завантаження системи масового обслуговування, і чому він важливий для оцінки її продуктивності?

Коефіцієнт завантаження (ρ\rhoρ) визначається як відношення інтенсивності надходження заявок (λ\lambdaλ) до інтенсивності їх обслуговування (μ\muμ):

ρ=λμ\rho = \frac{\lambda}{\mu}ρ=μλ

Він є важливим показником продуктивності, оскільки:

Якщо ρ<1\rho < 1ρ<1, система працює ефективно і може обслуговувати всі заявки.

Якщо ρ=1\rho = 1ρ=1, система завантажена на 100% і працює на межі можливостей.

Якщо ρ>1\rho > 1ρ>1, система перевантажена, і черги зростають безкінечно.